PROBLEMES

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

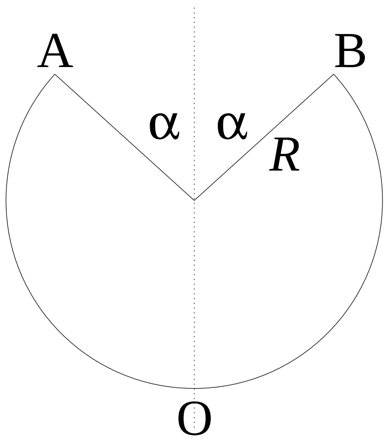
Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de juny a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat



Un patinador fa patinatge sobre una superfície sense fricció de secció circular de radi R truncada en els punts A i B, tal com s'indica en la figura adjunta. Sabent que α val 60^o, amb quina velocitat ha de passar pel punt O per poder saltar de A a B?

Problema per a l'alumnat universitari

Es pot levitar en el camp magnètic terrestre? Aproximant el camp magnètic terrestre a un dipol amb 0,3 gauss a l'equador, calculeu el corrent que circula per una anella de radi 1 m per produir la força necessària per elevar una càrrega d'1 kg. Si dupliquem el corrent de l'anella fins a quina alçada pujaria?

Solució als problemes del número anterior de la Revista

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

L'energia potencial electrostàtica d'un sistema de càrregues és el treball que ha hagut de realitzar un determinat agent extern per configurar-lo a partir de tenir-les molt allunyades entre si (infinitament separades).

Aquest procés de configuració el podem imaginar en tres etapes: primer l'agent extern trasllada la càrrega Q_A des d'una distància molt allunyada (l'infinit) fins al vèrtex A; a continuació trasllada la segona càrrega Q_B des de l'infinit fins al vèrtex B i, finalment, trasllada Q_C des de l'infinit fins al vèrtex C.

El treball necessari per al primer procés és evidentment nul ($W_A = 0$).

El treball necessari per traslladar Q_B des de l'infinit fins a B en presència de Q_A val:

$$W_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A Q_B}{r_{AB}}. \quad (1)$$

El treball necessari per traslladar Q_C des de l'infinit fins al tercer vèrtex C en presència de Q_A i Q_B val:

$$W_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A Q_C}{r_{AC}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_B Q_C}{r_{BC}}. \quad (2)$$

El treball total necessari per configurar el sistema és la suma d'aquests tres treballs. Per tant, substituint numèricament i sumant obtenim que l'energia electrostàtica del sistema val 9,90·10^{-8} J.

Finalment, cal remarcar que aquest resultat és independent de l'ordre amb què considerem que s'hagin anat transportant successivament les diferents càrregues.

Del problema per a l'alumnat universitari

a) Desprendre l'equador de la Terra per centrifugació, implica donar a una partícula en l'equador l'energia suficient per escapar de l'atracció terrestre. L'energia d'una partícula de massa m ve donada per la suma.

$$E = U + E_R \tag{3}$$

U és l'energia potencial gravitatòria de la partícula i E_R és l'energia de rotació. La partícula es desprendrà quan E sigui més gran que zero.

El potencial gravitatori per a una partícula de massa m és:

$$U(r) = \begin{cases} -G\frac{M\cdot m}{r} & r \geq R_t \\ -G\frac{M\cdot m}{2R_t^3}\left(3R_t^2 - r^2\right) & r < R_t \end{cases} \tag{4}$$

L'energia de rotació és:

$$E_R = \frac{1}{2}m(\omega r\cos(\theta))^2 \tag{5}$$

On $\theta \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ és la latitud de la partícula m a la Terra i ω és la velocitat de rotació. Si la partícula es troba a l'equador $\theta = 0$ i $r = R_t$ i l'energia dóna.

$$E = -G\frac{M\cdot m}{R_t} + \frac{1}{2}m\omega^2 R_t^2 \tag{6}$$

Busquem la mínima energia necessària per desprendre l'equador, $E = 0$, i aïllem ω.

$$\omega = \sqrt{2G\frac{M}{R_t^3}} \tag{7}$$

Substituint les dades, obtenim $\omega = 0,00175s^{-1}$ i la durada del dia serà $59'46''$.

b) Per calcular si només es desprèn l'equador, reescrivim l'equació 3 per qualsevol punt interior de la Terra.

$$E = -G\frac{M\cdot m}{2R_t^3}\left(3R_t^2 - r^2\right) + \frac{1}{2}m(\omega r\cos(\theta))^2 \tag{8}$$

I substituint ω pel resultat de l'apartat anterior.

$$E = -G\frac{M\cdot m}{2R_t^3}\left[3R_t^2 - r^2\left(2+\cos(2\theta)\right)\right] \tag{9}$$

que només és més gran o igual a zero si

$$3R_t^2 \leq r^2\left(2+\cos(2\theta)\right) \tag{10}$$

Atès que $r \leq R_t$ de l'equació anterior només es pot complir la igualtat quan $\theta = 0$ i $r = R_t$, i per tant només es desprèn l'equador.

c) Aconseguir la desintegració total del planeta és complicat, perquè els punts situats sobre l'eix de rotació no tenen mai energia de rotació. Independentment del mètode utilitzat, podem considerar la Terra com un sistema lligat de partícules autogravitants i calcular l'energia de rotació mínima necessària per desfer-lo.

$$\frac{dV}{dv} = \left[\frac{-3}{2}\,G\,\frac{M}{R_t} + \frac{1}{2}\,G\,\frac{M}{R_t^3}\,r^2\right]\frac{dm}{dv} \tag{11}$$

$$\frac{dm}{dv} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_t^3} \tag{12}$$

Integrem per calcular l'energia potencial de tota la Terra.

$$V = \int dV = 4\pi\int_0^{R_t}\frac{dV}{dv}r^2 dr \tag{13}$$

Calculant la integral obtenim.

$$V = -\frac{6}{5}\,G\,\frac{M^2}{R_t} \tag{14}$$

La mínima energia del sistema per deixar d'estar lligat.

$$E = V + E_r = 0 \tag{15}$$

Així, l'energia de rotació mínima que s'ha d'aportar al sistema per centrifugar la Terra completament és:

$$E_{min} = E_r = -V = \frac{6}{5}\,G\,\frac{M^2}{R_t} \tag{16}$$

Substituint les dades, obtenim $E_min = 4,473 \cdot 10^{32} J$.

L'energia de rotació d'una esfera massissa és

$$E_R = \frac{1}{5}MR_t^2\omega^2 \tag{17}$$

Substituint i aïllant ω podem obtenir la velocitat de rotació mínima per centrifugar la Terra.

$$\omega = \sqrt{6\,G\,\frac{M}{R_t^3}} \tag{18}$$

Substituint les dades, obtenim $\omega = 0,00303 s^{-1}$ i la durada del dia serà $34' \, 31''$.

d) Si obtenim l'energia necessària per centrifugar la Terra fent servir l'energia solar captada per una nau de la mateixa mida que la Terra, podem calcular el temps necessari per acumular tota aquesta energia.

Primer calculem la superfcie perpendicular il·luminada pel Sol.

$$S = \pi R_t^2 \tag{19}$$

Substituint les dades, obtenim $S = 1,28 \cdot 10^{14} m^2$. Si s'absorbeix tota la radiaci $\rho = 1360 W/m^2$, podem calcular la potència absorbida.

$$P \ = \ \rho S \ = \ 1,74 \cdot 10^{17} W \tag{20}$$

Dividint l'energia mínima calculada a l'apartat anterior per la potència absorbida, obtindrem el temps necessari per acumular-la.

$$T \ = \ \frac{E_{min}}{P} \ = \ 2,57 \cdot 10^{15} s \tag{21}$$

Trigarem 81,5 milions d'anys en acumular l'energia suficient.

e) Si envoltem el Sol completament per absorbir l'energia necessària, calculem la superfcie il·luminada.

$$S = 4\pi R_{sol}^2 \tag{22}$$

Prenent $R_{sol} = 1,50 \cdot 10^{11} m$ obtenim $S = 2,827 \cdot 10^{23} m^2$, i la potència absorbida és

$$P \ = \ \rho S \ = \ 3,84 \cdot 10^{26} W \tag{23}$$

Dividint l'energia mínima per la potència absorbida, obtindrem el temps necessari per acumular-la.

$$T \ = \ \frac{E_{min}}{P} \ = \ 1,163 \cdot 10^{6} s \tag{24}$$

Trigarem 13,5 dies en acumular l'energia suficient.